Tłumaczenie recenzji rozprawy doktorskiej ***"Convex sets, barycentric algebras and beyond"*** *mgr. Adama Komorowskiego. Recenzję przygotował w języku angielskim doc. RNDr. Přemysl Jedlička, Ph.D. Przetłumaczyła dr hab. inż. Anna Zamojska-Dzienio, przewodnicząca Komisji ds. przewodu doktorskiego mgr. Adama Komorowskiego.*

Recenzja rozprawy doktorskiej ***„Zbiory wypukłe, algebry barycentryczne i dalej"***

Jedną z najważniejszych klas modów binarnych są zbiory wypukłe z operacjami średnich ważonych. Jako algebry, zbiory wypukłe tworzą quasirozmaitość a rozmaitość, którą generują, jest nazywana (rozmaitością) algebr barycentrycznych.

Jedno z pytań badanych w tej rozprawie dotyczy bazy równościowej algebr barycentrycznych. Standardowa baza składa się z idempotentności, skośnej przemienności i skośnej łączności. Od dawna istniało pytanie, czy skośną łączność można zastąpić przez entropiczność. W rozprawie podano odpowiedź negatywną poprzez skonstruowanie klasy tak zwanych *t-progowych algebr barycentrycznych*. Są to algebry idempotentne, skośnie przemienne i entropiczne ale nie skośnie łączne.

Gdy mamy nową klasę algebr, która uogólnia dobrze znaną klasę, naturalnym pytaniem jest: „Które z własności nadal obowiązują w szerszej klasie?" Autor był w stanie pokazać, że wiele dowodów (przeprowadzanych) dla algebr barycentrycznych, można także zastosować do t-progowych algebr barycentrycznych. Niestety, w dowodzie Wniosku 2.4.9 jest błąd ale wierzę, że rezultat jest, pomimo tego, poprawny.

W dalszej części, autor wprowadza pewne uogólnienia rozmaitości t-progowych algebr barycentrycznych. Znowu, wiele własności algebr barycentrycznych zostaje zachowanych. Na przykład, w ostatnim rozdziale autor zastępuje ciało $\mathbb{R}$ przez dowolny pierścień; wtedy główny problem polega na tym, jak zdefiniować pojęcie odcinka, aby nadal mieć zbiory wypukłe.

Wyniki rozprawy nie są bardzo głębokie; tak właściwie jedynym głębszym pomysłem są same t-progowe algebry barycentryczne jako kontrprzykład do problemu Keimela. Pozostałe wyniki można uzyskać prawie bezpośrednio. Z drugiej strony, „bezpośrednio" nie oznacza łatwo i autor udowodnił, że opanował rzemiosło matematyczne. Dlatego uważam, że rozprawa jest wystarczająca do przyznania stopnia doktora i rekomenduję nadanie tego stopnia Adamowi Komorowskiemu.

Faktem wartym odnotowania jest wybór pozycji bibliograficznych: większość cytowanych artykułów jest sprzed dziesiątek lat. Co więcej, jedyne artykuły z obecnego wieku to artykuły profesor Romanowskiej. Kwestia ta powinna być zdecydowanie wyjaśniona podczas obrony.

Główne uwagi

- str. 13: „Definicja" Ω-półkraty jest niejasna. Weźmy nośnik A i pewien zbiór operacji Ω. Czy mówimy, że (A, Ω) jest Ω-półkratą jeśli istnieje dwuargumentowa, idempotentna, przemienna i łączna operacja $\cdot$ na A taka, że dla każdego $\omega \in \Omega$, $x_1 x_2 \dots x_n \omega = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$?
  Czy kwantyfikatory są w odwrotnej kolejności, czyli dla każdego $\omega \in \Omega$ istnieje dwuargumentowa, idempotentna, przemienna i łączna operacja $\cdot$ taka, że $x_1 x_2 \dots x_n \omega = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$?
- str. 27: Twierdzenie 2.3.5 nie jest prawidłowo sformułowane, ponieważ pojęcie „algebry generowanej przez pewne elementy" nie zostało zdefiniowane. Poprawną wersją byłoby: "... threshold-t barycentric subalgebra of $(I, \underline{I}^o)$ generated by $\{0, 1\}$..." („... t-progowa podalgebra barycentryczna $(I, \underline{I}^o)$ generowana przez $\{0, 1\}$...")
- str. 33: W dowodzie Wniosku 2.4.9 nie możemy stosować Twierdzenia 2.3.5, ponieważ nie wiemy, czy A jest podalgebrą zbioru wypukłego.
- str. 34: Twierdzenie 2.4.12 wynika z Wniosku 2.4.9, chociaż nie jest to wyraźnie stwierdzone.
- str. 43: W dowodzie Twierdzenia 3.1.13 domyślnie używa się Twierdzenia 1.6.2. To odniesienie powinno być jawne.
- str. 45: W definicji 3.2.2 prawdopodobnie miano na myśli rozmaitość generowaną przez wszystkie algebry postaci (A, Ω), gdzie A jest przestrzenią afiniczną nad $\mathbb{F}$, zaś $\Omega = \{\underline{p}; p \in \mathbb{F}\}$.
- str. 63–65: Jeśli przykłady wymagają dowodów, to powinny być raczej podane jako stwierdzenia. Ponadto, J' i J'' zależą od R' i dlatego wygodniejszymi oznaczeniami byłyby: $J'_{R'}$ i $J''_{R'}$ (oraz, oczywiście, pomijano by indeks dolny, jeśli R' wynikałoby z kontekstu).
- str. 67: Stwierdzenie 4.3.3 jest źle sformułowane: B jest podzbiorem A, zaś redukt jest algebrą. Zbiór nie jest algebrą, chyba że niejawnie przyjęliśmy pewien zbiór operacji na nim zdefiniowanych. Tutaj, mamy

trzy różne zbiory operacji, mianowicie $\underline{R}$, $\underline{S}$ i $\underline{T}$ i żaden z nich nie jest określony w sposób jawny na B. Prawdopodobne znaczenie jest następujące: "B is closed on the operations $\underline{S}$ precisely when B is closed on the operations $\underline{T}$." („ B jest zamknięty na operacje ze zbioru $\underline{S}$ dokładnie wówczas, gdy jest zamknięty na operacje ze zbioru $\underline{T}$.")

Drobne błędy i literówki

- str. 9: Liczbę argumentów (arność) operacji zdefiniowano w notacji infiksowej a następnie używano w notacji prefiksowej.
- str. 9: Trzeci akapit zaczyna się od małego a.
- str. 9: Klon zdefiniowano używając pojęcia klonu.
- str. 15: Równanie (1.6.5) nie ma prawej strony.
- str. 16: Brakuje kropki na końcu strony.
- str. 37: Oba symbole s i t używane są w dwóch różnych znaczeniach.
- str. 39: $w_c^s = v_c^s$.
- str. 62: W przykładzie 4.2.11 należy zastąpić "may not" przez "need not".
- str. 63: W pierwszej linijce, brakuje dwóch przecinków oraz $a + b$ nie zostało zdefiniowane.
- str. 65: Definicja $J''[k]$ powinna być: $\{f(k)|f \in J''(x)\}$.
- str. 73: W Lemacie 4.4.8 pojawia się Jam-mison.
- str. 78: Pozycje [27] i [28] dublują się.
- str. 78: W pozycji [44] pojawia się "frepresentation".

Podpis: dr. hab. Přemysl Jedlička, PhD.

Tłumaczyła: dr hab. inż. Anna Zamojska-Dzienio

Anna Zamojska-Dzienio